Corrigé type de l'examen de Mathématiques 2
Promotion : $1^{ère}$ année ingénieur agronome
Année universitaire: 2023/2024

Exercice 1

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1 Le carré de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (produit de M par elle-même) est: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. **2,5pts**

En effet,

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\times(-1)+1 & (-1)\times 1+(-1)\times 1 \\ 1\times(-1)+(-1)\times 1 & 1\times 1+(-1)\times(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} -a & 4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ est: $4-a^2$. **2,5pts**

En effet,

$$\begin{vmatrix} -a & 4 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 4-a^2.$$

3 Soient A et B deux matrices carrées. Alors, $det(AB) = det(A) \times det(B)$. **2,5pts**

En effet,

une méthode courante pour démontrer la propriété du déterminant du produit est d'utiliser la décomposition **LU** où **L** est une matrice triangulaire inférieure et **U** est une matrice triangulaire supérieure. La décomposition LU consiste à écrire une matrice **A** sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

où **L** est une matrice triangulaire inférieure et **U** est une matrice triangulaire supérieure. De même pour la matrice **B**, nous avons :

$$\mathbf{B} = \mathbf{L'U'}$$

En utilisant les décompositions de **A** et **B**, nous avons :

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{LU})(\mathbf{L'U'})$$

En utilisant les propriétés des déterminants, nous avons :

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{LUL'U'})$$

Puisque les déterminants sont multiplicatifs pour des matrices triangulaires et que la multiplication de déterminants de matrices triangulaires donne le déterminant du produit des matrices :

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})\det(\mathbf{L'})\det(\mathbf{U'})$$

Or, par les propriétés de la décomposition LU, nous savons que :

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$$

$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{L'})\det(\mathbf{U'})$$

Donc, nous avons :

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$

4 La condition pour qu'une matrice carrée A soit inversible est: $det(A) \neq 0$ **2,5pts**

5 Si une matrice carrée ne possède pas d'inverse, c'est que forcément: son déterminant est nul. **2,5pts**

6 L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est:$-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Car **2,5pts**

$$-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = I_2.$$

7 $\mathbf{AB}$ est le produit de deux matrices carrées $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ inversibles. L'inverse de $\mathbf{AB}$ est alors: $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ **2,5pts**

En effet,

soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices carrées inversibles de taille $n \times n$. Nous voulons démontrer que :

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Étape 1 : Montrer que $\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$

Calculons $\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$:

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1}$$

Nous savons que $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$, où $\mathbf{I}$ est la matrice identité de taille $n \times n$. Donc :

$$\mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Étape 2 : Montrer que $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} = \mathbf{I}$

Calculons $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB}$:

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

Conclusion

Nous avons montré que :

$$\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$$

et

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} = \mathbf{I}$$

Par la définition de l'inverse d'une matrice, cela implique que :

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

8 Une formule pour calculer l'inverse d'une matrice carrée A quand il existe est: $\frac{1}{det(A)} \times^{t} (comA)$ **2,5pts**

Une séance de consultation des copies est programmée le 27/05/2024, salle1 Pavillon C à 11:30".